Université Paris-Dauphine
Jean Pisani-Ferry
Rev. Nov 06

Equations différentielles à deux variables et trajectoire-selle

Références : Carl Simon et Lawrence Blume, Mathematics for Economists, Norton 1994

Principes

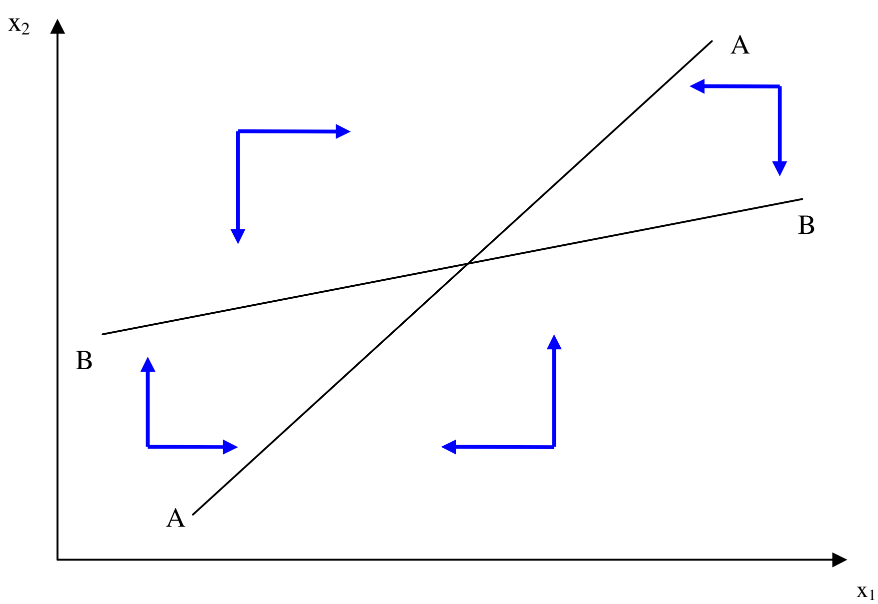
L'étude de la dynamique de modèles macro-économiques débouche souvent sur des systèmes d'équations différentielles à deux (ou plusieurs) variables, de type :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

avec $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$

Diagramme des phases

Graphiquement, le système est représenté par deux droites dans le plan (x_1, x_2). On peut régionner le plan en fonction du sens d'évolution des deux variables. Par exemple, si la droite AA correspond à la première équation et la droite BB à la seconde, que x_1 est décroissant à droite de AA et x_2 est décroissant au-dessus de BB, le sens d'évolution des deux variables peut être représenté par des flèches dans le plan de la manière suivante.



Visuellement, le système représenté aboutit à partir de n'importe quel point du plan à une convergence vers l'intersection des deux droites. Cependant on peut aussi aboutir à des systèmes divergents.

Résolution mathématique

Un système de deux équations différentielles linéaires se réécrit sous forme matricielle :

$$\dot{X} = AX$$

Si la matrice A est diagonalisable, i.e. $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale des valeurs propres λ_i de A, et P la matrice de passage du changement de base, alors on peut poser $Z = P^{-1}X$, et l'équation se réécrit :

$\dot{Z} = DZ$, soit :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A, dont les solutions sont de la forme :

$$z_i = \alpha_i e^{\lambda_i t}$$

Les solutions du système (1) sont donc de la forme :

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{V}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{V}_2$ où $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont des vecteurs propres tels que $A\vec{V}_i = \lambda_i \vec{V}_i$.

On a donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_2 &= c'_1 e^{\lambda_1 t} + c'_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

où les coefficients c, c' dépendent des coefficients de A et de α_1, α_2.

Dynamique

La dynamique provient des valeurs de λ_1 et λ_2, qui comme valeurs propres de A sont racines de l'équation caractéristique $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$:

- si λ_i est réel et positif, $z_i = \alpha_i e^{\lambda_i t}$ est explosif
- si λ_i est réel et négatif, $z_i = \alpha_i e^{\lambda_i t}$ converge vers zéro
- si λ_i est complexe, $z_i = \alpha_i e^{\lambda_i t}$ est oscillant

Dans le cas de deux équations, on montre facilement que l'équation caractéristique se réécrit :

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + Det(A) = 0$$

où Det (A) est le déterminant de la matrice A et Tr (A) sa trace.

donc $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A)$, $\lambda_1\lambda_2 = \mathrm{Det}(A)$

et les solutions sont de la forme $\lambda_i = \dfrac{Tr(A) \pm \sqrt{Tr(A)^2 - 4Det(A)}}{2}$

On doit donc distinguer les cas suivants :

- $\mathrm{Det}\,(A) \leq [\mathrm{Tr}(A)^2]/4$. Les deux racines sont réelles.
- $\mathrm{Det}\,(A) \leq [\mathrm{Tr}(A)^2]/4$. Les deux racines sont complexes conjuguées.

Stabilité

Un point important est de savoir si la solution est *stable*, i.e. si x_1 et x_2 tendent vers zéro avec t (il faut se rappeler que l'équation (1) est homogène, qu'elle n'a pas de second membre). Cela dépend de la partie réelle de la racine, qui doit être négative. Pour cela, on montre aisément en reprenant les différents cas qu'il faut et suffit que :

Det(A) >0 et Tr (A) < 0

La seconde condition (Tr (A) < 0) s'interprète aisément : pour que le système soit stable, il ne faut pas que la croissance de chacune des variables dépende positivement de son niveau.

La condition Det (A) positif s'écrit :

$a_{11}a_{22} > a_{21}a_{12}$ ou encore $\frac{a_{11}}{a_{12}} > \frac{a_{21}}{a_{22}}$, ce qui revient à dire que dans le plan (x_1, x_2) la pente de la première droite est supérieure à celle de la seconde.

Trajectoires-selle

Un cas intéressant est le cas Det(A) < 0, qui correspond au fait que le produit des deux racines est négatif. Les deux racines sont alors réelles (le produit de deux nombres complexes conjugués est positif), l'une est négative et l'autre est positive. Si par exemple $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$, il existe alors *une* trajectoire stable, qui s'obtient en faisant $c_2 = c'_2 = 0$ dans la solution générale :

$$x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$x_2 = c'_1 e^{\lambda_1 t} + c'_2 e^{\lambda_2 t}$$

Cela signifie qu'on ne dispose plus que d'un degré de liberté au lieu de deux pour choisir les coefficients : il n'est plus possible de faire passer la solution par une valeur initiale donnée (x_1^0, x_2^0), on peut seulement choisir *une* des deux valeurs initiales. L'autre variable doit « sauter » sur la trajectoire stable, qui s'appelle *trajectoire-selle*.

Graphiquement, on peut représenter les différents cas de la manière suivante :